

СИНТЕЗ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ N-И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ В КОНТЕКСТЕ ТЕОРЕМЫ ОБ N ИНТЕРВАЛАХ

Введение. Динамическим режимам электромеханических систем характерно ограничение различных координат состояния на отдельных этапах переходных процессов. Метод N-и переключений позволяет осуществить параметрический синтез каскада релейных регуляторов, реализующих такие ограничения. Кроме того, в силу исключительной простоты математического аппарата данный метод легко адаптируется к различным формам переходной траектории, что делает перспективным его применение при построении самонастраивающихся систем оптимального по быстродействию управления.

Постановка задачи исследования. Параметрический синтез релейных систем подчинённого регулирования (СПР) методом N-и переключений основан на использовании уровней ограничения их фазовых координат. В работе [1] выполнен синтез системы четвёртого порядка для динамических режимов, в которых не достигается ни один из наперёд заданных уровней ограничения. При этом в качестве ограничений приняты максимумы, достигаемые каноническими координатами на временных диаграммах, имеющих форму криволинейных треугольников (рисунок 1,а). Однако данная форма переходной траектории может считаться оптимальной по быстродействию лишь как предельный случай реализуемой каскадом релейных регуляторов трапецеидальной траектории, для которой равны нулю интервалы стабилизации всех координат кроме сигнала управления. В представленном на рисунке 1,а переходном процессе характер изменения N-й производной $a(t)$ выходной координаты $\Omega(t)$ не удовлетворяет теореме об N интервалах [2], формулирующей необходимое условие оптимальности по быстродействию при ограничении управляющего воздействия. Задачей настоящей работы является развитие результатов работы [1] в направлении всеобъемлющей адаптации метода N-и переключений к форме траектории оптимального по быстродействию переходного процесса.

Материалы исследования. Большинство электромеханических систем, независимо от их порядка N, имеет один канал передачи управляющего воздействия. Эта особенность структуры позволяет вполне адекватно описать их динамические режимы в пространстве канонических координат

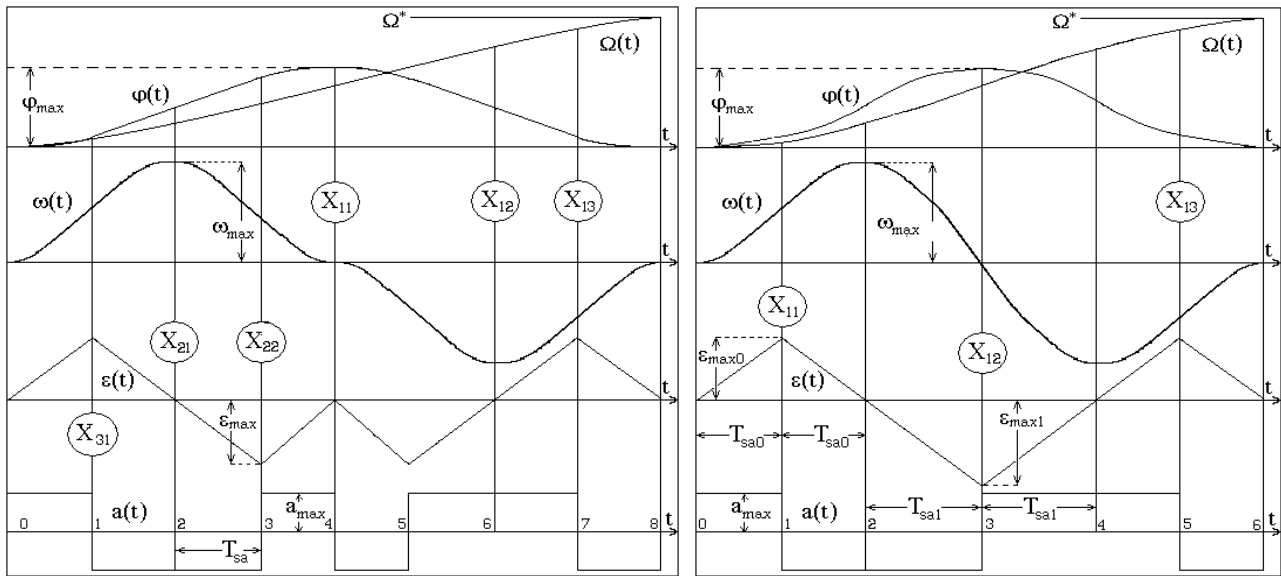
$$\left(\Omega, p\Omega, p^2\Omega, p^3\Omega, p^4\Omega \right) = \left(\Omega, \varphi, \omega, \varepsilon, a \right), \quad (1)$$

представив ограничение управляющего воздействия эквивалентным ограничением N-й производной регулируемой величины Ω . Математическое описание замкнутой по вектору канонических координат релейной системы подчинённого регулирования 4-го порядка имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u_{R\Omega} &= \varphi^* = \\ &= -\varphi_{\max} \cdot \text{sign}(\Omega - \Omega^* + K_{\Omega\varphi} \cdot \varphi + K_{\Omega\omega} \cdot \omega + K_{\Omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R\varphi} &= \omega^* = -\omega_{\max} \cdot \text{sign}(\varphi - \varphi^* + K_{\varphi\omega} \cdot \omega + K_{\varphi\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R\omega} &= \varepsilon^* = -\varepsilon_{\max} \cdot \text{sign}(\omega - \omega^* + K_{\omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R\varepsilon} &= a^* = -a_{\max} \cdot \text{sign}(\varepsilon - \varepsilon^*) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где $p = d/dt$; u_{Ri} - сигнал i-го (считая от входа) регулятора; индексами «max» отмечены максимальные значения канонических координат, достигаемые при отработке системой заданного скачка Ω^* ; символом «*» отмечены также заданные значения промежуточных координат, формируемые регуляторами; K_{ij} - коэффициенты обратных связей. Принятая в (1) система буквенных обозначений k-х производных регулируемой координаты $p^k\Omega$ заимствована из [1] и призвана облегчить восприятие прогнозируемых переходных траекторий, которые представлены на рисунке 1.

На рисунке 1,б представлены временные диаграммы канонических координат оптимального по быстродействию переходного процесса системы четвёртого порядка, удовлетворяющего теореме об N интервалах. Для его реализации необходимы три единичных переключения управляющего воздействия, которые способен осуществить до вхождения в скользящий режим внешний регулятор R_Ω каскада (2): $N-i = 4-1 = 3$, где $i=1$ – номер регулятора в каскаде. Следовательно, выбор характерных точек в рассматриваемом случае не требуется, поскольку число точек переключения управляющего воздействия, определённое согласно теореме об N интервалах, равно числу единичных переключений внешнего регулятора каскада (2) согласно методу N-и переключений. Заметим, что при формировании переходной траектории, представленной на рис.1,б формы, роль внутренних регуляторов СПР сведётся к повторению переключений R_Ω с изменением масштаба его выходного сигнала. Поэтому они могут быть исключены из алгоритма (2) во время отработки режимов «малого треугольника» при назначении сигналу регулятора R_Ω амплитуды a_{\max} .



а) предельный случай трапецеидальной траектории

б) режим «малого треугольника»

Рисунок 1 – Переходные процессы системы четвёртого порядка

Прогнозирование траектории режима «малого треугольника» (рисунок 1,б) должно быть выполнено не только для трёх точек переключения X_{11}, X_{12}, X_{13} , соответствующих точкам 1,3,5 в сквозной нумерации. В отличие от рассмотренного в [1] случая вырожденной трапецеидальной диаграммы (рис.1,а), для которой все интервалы стабилизации 4-й производной имеют одинаковую длительность T_{sa} , интервалы постоянства управляющего воздействия в случае треугольных диаграмм (рис 1,б) являются различными $T_{sa0} \neq T_{sa1}$ и соотношение этих величин может быть установлено в ходе подробного расчёта.

Выполним прогнозирование оптимальной по быстродействию траектории согласно рисунку 1,б, основываясь на длительности интервала T_{sa0} . Приняв нулевые начальные условия в точке 0, получим путём интегрирования с помощью рядов Тейлора следующие значения канонических координат системы.

$$\text{Точка 1: } \varepsilon_1 = \varepsilon_{\max 0} = a_{\max} T_{sa0}; \quad \omega_1 = a_{\max} \frac{T_{sa0}^2}{2}; \quad \varphi_1 = a_{\max} \frac{T_{sa0}^3}{6}; \quad \Omega_1 = a_{\max} \frac{T_{sa0}^4}{24}.$$

$$\text{Точка 2: } \varepsilon_2 = 0; \quad \omega_2 = a_{\max} T_{sa0}^2 = \omega_{\max}; \quad \varphi_2 = a_{\max} T_{sa0}^3; \quad \Omega_2 = \frac{7}{12} a_{\max} T_{sa0}^4.$$

Расчётная траектория (рис.1,б) на интервале 0 – 2 идентична соответствующему фрагменту вырожденной трапецеидальной траектории (рис.1,а). Для дальнейшего расчёта траектории режима «малого треугольника» необходимо установить связь между величинами интервалов T_{sa0} и T_{sa1} . Длительность T_{sa1} может быть установлена исходя из необходимости снижения на интервале 2-3 величины $\omega(t)$ до нуля от значения $\omega_{\max} = a_{\max} T_{sa0}^2$, приобретенного на интервале 0 – 1. Величина приращения $\omega(t)$ на интервале 2-3 согласно разложению в ряд Тейлора составит $a_{\max} \frac{T_{sa1}^2}{2}$, откуда получим уравнение $a_{\max} T_{sa0}^2 = a_{\max} \frac{T_{sa1}^2}{2}$, из которого найдём выражение взаимосвязи интервалов постоянства N-й производной:

$$T_{sa1} = \sqrt{2} \cdot T_{sa0}. \quad (3)$$

Продолжив интегрирование на интервале 2 – 3, получим координаты точки 3:

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_{\max 1} = -\sqrt{2} \cdot \varepsilon_{\max 0} = -a_{\max} \sqrt{2} \cdot T_{sa0}; \quad \omega_3 = 0; \quad \varphi_3 = a_{\max} T_{sa0}^3 \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \right) = \varphi_{\max}; \quad \Omega_3 = a_{\max} T_{sa0}^4 \left(1 + \frac{5}{12} \sqrt{2} \right).$$

Заметим, что соотношение (3) позволяет выражать все величины только через длительность интервала T_{sa0} . Опустив координаты точки 4, не являющейся точкой переключения R_1 , приведём координаты точки 5:

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_{\max 0} = a_{\max} T_{sa0}; \quad \omega_5 = \frac{1}{2} a_{\max} T_{sa0}^2; \quad \varphi_5 = \frac{1}{6} a_{\max} T_{sa0}^3 = \varphi_{\max}; \quad \Omega_5 = a_{\max} T_{sa0}^4 \left(2 + \frac{19}{24} \sqrt{2} \right).$$

Получив значения канонических координат системы для трех характерных точек X_{11}, X_{12}, X_{13} , которые в сквозной нумерации рисунка 1,б обозначены как 1, 3, 5 соответственно, составим систему уравнений переключения регулятора R_{Ω} :

$$\left. \begin{aligned} -\Omega_1 + K_{\Omega\varphi}\varphi_1 - K_{\Omega\omega}\omega_1 + K_{\Omega\varepsilon}\varepsilon_1 &= 0 \\ -\Omega_3 + K_{\Omega\varphi}\varphi_3 - K_{\Omega\omega}\omega_3 + K_{\Omega\varepsilon}\varepsilon_3 &= 0 \\ -\Omega_5 + K_{\Omega\varphi}\varphi_5 - K_{\Omega\omega}\omega_5 + K_{\Omega\varepsilon}\varepsilon_5 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Её решение позволяет определить аналитические выражения коэффициентов обратных связей регулятора R_Ω как функции расчётной длительности интервалов постоянства управляющего воздействия T_{sa0} :

$$K_{\Omega\varphi} = \frac{1}{2} T_{sa0} \frac{41 + 29\sqrt{2}}{6 + 5\sqrt{2}}; K_{\Omega\omega} = T_{sa0}^2 \left(2\frac{3}{4} + 2\sqrt{2} \right); K_{\Omega\varepsilon} = \frac{1}{12} T_{sa0}^3 \frac{181 + 128\sqrt{2}}{6 + 5\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Продолжив прогнозирование траектории до точки 6, получим достаточно простую взаимосвязь заданного значения Ω^* с расчётным интервалом времени:

$$\Omega_6 = a_{\max} T_{sa0}^4 \left(2\frac{5}{6} + 2\sqrt{2} \right) = \Omega^*,$$

откуда найдём выражение интервала T_{sa0} как функции заданного значения регулируемой координаты, воспроизводимой системой четвёртого порядка на расчётной траектории движения:

$$T_{sa0} = \sqrt[4]{\frac{\Omega^*}{a_{\max} \left(2\frac{5}{6} + 2\sqrt{2} \right)}}. \quad (5)$$

Подстановка выражения (5) в формулы (4) позволяет представить параметры оптимального регулятора как явные аналитические функции задающего воздействия и расчётного уровня ограничения четвёртой производной регулируемой координаты. Опустим результаты такой подстановки в связи с их громоздкостью, отметив, что последовательность формул (5), (4) представляет собой фактически алгоритм самонастройки системы на оптимальную по быстродействию отработку заданного значения выходной координаты Ω^* в режиме «малого треугольника».

Верхняя граница диапазона реализуемости траектории данной формы может быть определена из следующей системы неравенств, описывающих условия непревышения наперёд заданных уровней ограничений координат, обозначенных символом «*», достигаемыми на расчётной траектории максимальными значениями

$$\varepsilon_{\max 1} \leq \varepsilon_{\max}^*; \omega_{\max} \leq \omega_{\max}^*; \varphi_{\max} \leq \varphi_{\max}^*, \quad (6)$$

путём подстановки в неравенства (6) формул (4), (5) и разрешения относительно Ω^* .

Регулятор R_Ω , коэффициенты (4) функции переключения которого были определены в настоящей работе, образует с объектом управления систему четвёртого порядка. Однако, с учетом понижения на единицу порядка линеаризованной системы в скользящем режиме, проверка устойчивости её внешнего контура сводится к анализу характеристического уравнения третьего порядка вида

$$1 + K_{\Omega\varphi} \cdot p + K_{\Omega\omega} \cdot p^2 + K_{\Omega\varepsilon} \cdot p^3 = 0. \quad (7)$$

Взаимосвязь корней кубического уравнения с его коэффициентами, устанавливаемая формулами Кардано, в сочетании с громоздкими выражениями самих коэффициентов (4) является весьма сложной, что делает неоправданно трудоемкой оценку устойчивости данной системы путём определения корней уравнения (7). Поэтому проверку устойчивости скользящего режима контура регулирования на основе R_Ω целесообразно выполнить с помощью косвенного алгебраического критерия Рауса-Гурвица, который для характеристического уравнения (7) дает систему неравенств:

$$\begin{vmatrix} K_{\Omega\omega} & 1 & 0 \\ K_{\Omega\varepsilon} & K_{\Omega\varphi} & 0 \\ 0 & K_{\Omega\omega} & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} K_{\Omega\omega} & 1 \\ K_{\Omega\varepsilon} & K_{\Omega\varphi} \end{vmatrix} > 0; \quad K_{\Omega\omega} > 0. \quad (8)$$

Положительные значения всех коэффициентов обратных связей вытекают из вида выражений (4). Условие устойчивости (8) сводится к следующему неравенству:

$$K_{\Omega\omega} K_{\Omega\varphi} - K_{\Omega\varepsilon} > 0. \quad (9)$$

Подстановка в неравенство (9) коэффициентов (4), представленных явными функциями неотрицательного интервала T_{sa0} , позволяет упростить его до вида

$$\frac{1}{24} \frac{T_{sa0}^3 (2383 + 1685\sqrt{2})}{6 + 5\sqrt{2}} > 0,$$

который однозначно свидетельствует об устойчивости скользящего режима R_Ω , возникающего после отработки режима малого треугольника.

На рисунке 2 представлен пример переходного процесса, реализованного системой управления нейтрально-устойчивым объектом с регулятором R_Ω , коэффициенты которого рассчитаны по формулам (5) с учётом значения (5) для случая $\Omega^* = 1$, $a_{\max} = 1000$. Настройка внутренних контуров выполнена по результатам работы [1] с учётом $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\max 1}$. Сигналы регуляторов показаны в относительных единицах с кратными масштабами, визуально уменьшающими амплитуду сигнала по мере подчиненности регулятора. Диаграмма переключений релейных регуляторов демонстрирует синхронную работу каскада (2) при отработке «малого треугольника». Данный режим является частным случаем работы СПР, ориентированной на воспроизведение траекторий более общей формы. Характер переключений R_Ω удовлетворяет требованиям теоремы об N интервалах, что свидетельствует об оптимальности синтезированной системы по быстродействию. Соответствие диаграмм переходных процессов, приведенных на рисунке 2 их расчётному виду, приведенному на рисунке 1,б, свидетельствует о корректности аналитических результатов работы.

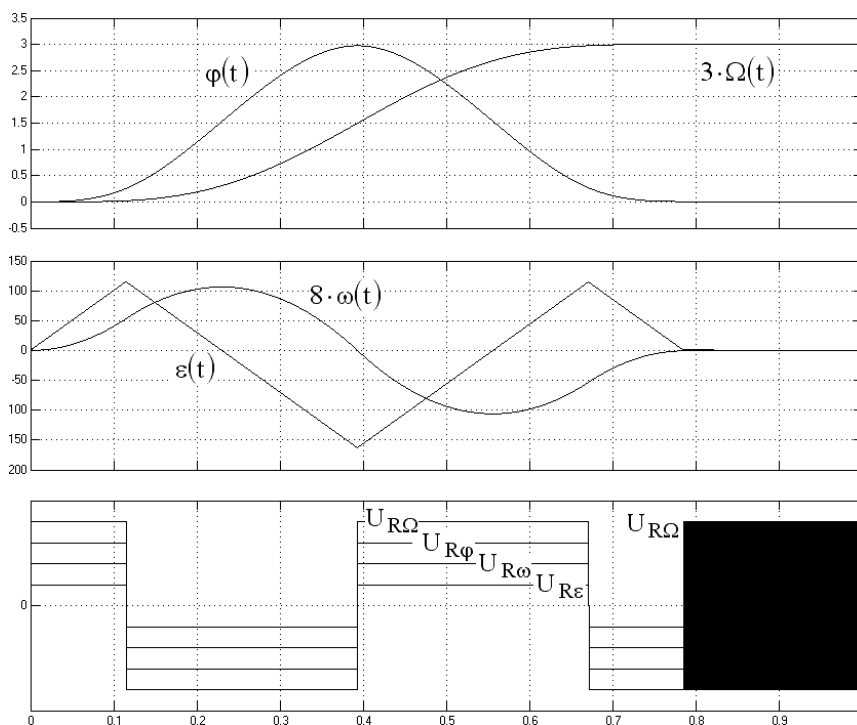


Рисунок 2

Выводы. Установленная в настоящей работе взаимосвязь между величиной задающего воздействия и параметрами релейного регулятора позволяет использовать метод N-i переключений для настройки системы управления на отработку оптимальной по быстродействию траектории режима «малого треугольника», отвечающей требованиям теоремы об N интервалах. Благодаря простоте расчета настроек (5), (4) оптимальных регуляторов изложенная процедура параметрического синтеза может служить основой для построения адаптивных цифровых систем управления. Доказанная в настоящей работе устойчивость скользящего режима таких систем позволяет исключить из процедуры самонастройки какие-либо операции, связанные с проверкой устойчивости при обновлении параметров, и обеспечивает экономию вычислительных ресурсов контроллера. Представленные исследования выполнены для контура управления нейтрально-устойчивым объектом. Однако, полученные аналитические выражения коэффициентов относятся к каноническим координатам системы, что позволяет распространить результаты данной работы на все синтезированные данным методом системы четвертого порядка, замкнутые по старшим производным выходной переменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовой А.В., Дерез А.Л. Синтез методом N-i переключений релейной системы четвертого порядка без внутренних ограничений // Сборник научных трудов Днепропетровского государственного техн. ун-та (технические науки), выпуск 1(9). – Днепропетровск, 2008. – с.167 - 171.
2. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. — М.: Наука, 1966. — 624 с.